

专练2 开放题专练

1. $\frac{1}{2}$ 1(答案不唯一) 【解析】若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充要条件,

则 A, B 表示的集合相同, 由 $B = \{x \mid bx > 1\}$, 得 $B = \left\{x \mid x > \frac{1}{b}\right\} (b > 0)$, 因为 $A = \{x \mid x > 2\}$, 所以 $\frac{1}{b} = 2$, 解得 $b = \frac{1}{2}$. 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件, 则 $A \subsetneq B$, 所以

$$\begin{cases} b > 0, \\ \frac{1}{b} < 2, \end{cases}$$

解得 $b > \frac{1}{2}$, 即实数 b 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 则答案可为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 中的任一实数.

2. 【解】(1) 由 $(x+1)(x-3) < 0$, 解得 $-1 < x < 3$, 所以 $B = \{x \mid -1 < x < 3\}$.

当 $a = 2$ 时, $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$, 所以 $A \cap B = \{x \mid 2 \leq x < 3\}$.

(2) 若选① $A \cup B = B$, 则 $A \subseteq B$, 则 $\begin{cases} a > -1, \\ a+2 < 3, \end{cases}$

解得 $-1 < a < 1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-1, 1)$.

若选② “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的充分条件, 则 $A \subseteq B$, 则 $\begin{cases} a > -1, \\ a+2 < 3, \end{cases}$

解得 $-1 < a < 1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-1, 1)$.

若选③ “ $x \in \complement_{\mathbf{R}} A$ ” 是 “ $x \in \complement_{\mathbf{R}} B$ ” 的必要条件, 则 $\complement_{\mathbf{R}} B \subseteq \complement_{\mathbf{R}} A$,

故 $A \subseteq B$, 所以 $\begin{cases} a > -1, \\ a+2 < 3, \end{cases}$

解得 $-1 < a < 1$, 即实数 a 的取值范围为 $(-1, 1)$.

3. 【解】(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $B = \{x \mid ax - 1 \geq 0\} = \left\{x \mid \frac{1}{2}x - 1 \geq 0\right\} = \{x \mid x \geq 2\}$,

则 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid x < 2\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$.

(2) 若选①, 因为 $A \cap B = A$, 所以 $A \subseteq B$, 则 $B \neq \emptyset$.

当 $a < 0$ 时, $B = \left\{x \mid x \leq \frac{1}{a}\right\}$, 由 $\{x \mid 1 \leq x \leq 5\} \subseteq \left\{x \mid x \leq \frac{1}{a}\right\}$, 可得 $\frac{1}{a} \geq 5$, 无解;

当 $a > 0$ 时, $B = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{a}\right\}$, 由 $\{x \mid 1 \leq x \leq 5\} \subseteq \left\{x \mid x \geq \frac{1}{a}\right\}$, 可得 $\frac{1}{a} \leq 1$, 故 $a \geq 1$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \geq 1\}$.

若选②, 因为 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 5\}$, 又 $B \cup (\complement_{\mathbf{R}} A) = \mathbf{R}$, 则 $B \neq \emptyset$.

当 $a < 0$ 时, $B = \left\{x \mid x \leq \frac{1}{a}\right\}$, 需使 $\frac{1}{a} \geq 5$, 无解;

当 $a > 0$ 时, $B = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{a}\right\}$, 需使 $\frac{1}{a} \leq 1$, 解得 $a \geq 1$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \geq 1\}$.

若选③, 因为 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \emptyset$,

所以当 $a = 0$ 时, $B = \emptyset$, $\complement_{\mathbf{R}} B = \mathbf{R}$, 不符合题意;

当 $a < 0$ 时, $B = \left\{x \mid x \leq \frac{1}{a}\right\}$, 需使 $\frac{1}{a} \geq 5$, 无解;

当 $a > 0$ 时, $B = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{a}\right\}$, 需使 $\frac{1}{a} \leq 1$, 解得 $a \geq 1$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\{a \mid a \geq 1\}$.

4. 【解】(1) 若选①: $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数. 证明如下:

设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, 所以 $f(x_2 - x_1) > 0$.

由 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 得 $f(x+y) - f(x) = f(y)$,

所以 $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) > 0$,

所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数.

若选②: $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数. 证明如下:

设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, 所以 $f(x_2 - x_1) > 2$.

由 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$ 得 $f(x+y) - f(x) = f(y) - 2$,

所以 $f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) - 2 > 0$,

所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数.

若选③: $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数. 证明如下:

设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$, 所以 $f(x_2 - x_1) > 1$.

由 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 得 $\frac{f(x+y)}{f(x)} = f(y)$, $\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = f(x_2 - x_1) > 1$,

又 $f(x_1) > 0$, 所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数.

(2) 若选①: 由 $f(2) = 4$ 得 $f(4) = f(2) + f(2) = 8$,

所以 $f(1+4a) \leq 8$ 可化为 $f(1+4a) \leq f(4)$,

根据 $f(x)$ 的单调性, 得 $1+4a \leq 4$, 解得 $a \leq \frac{3}{4}$, 所以不等式

$f(1+4a) \leq 8$ 的解集为 $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.

若选②: 由 $f(1) = 5$ 得 $f(2) = 2f(1) - 2 = 8$, 所以 $f(1+4a) \leq 8$ 可化为 $f(1+4a) \leq f(2)$, 根据 $f(x)$ 的单调性, 得 $1+4a \leq 2$, 解

得 $a \leq \frac{1}{4}$, 所以不等式 $f(1+4a) \leq 8$ 的解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$.

若选③: 由 $f(2) = 2$ 得 $f(4) = f(2) \cdot f(2) = 4$, $f(6) = f(4) \cdot f(2) = 8$,

所以 $f(1+4a) \leq 8$ 可化为 $f(1+4a) \leq f(6)$, 根据 $f(x)$ 的单调

性, 得 $1+4a \leq 6$, 解得 $a \leq \frac{5}{4}$,

所以不等式 $f(1+4a) \leq 8$ 的解集为 $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$.